QUÀDRIQUES I INTERSECCIONS

Les superfícies que matemàticament queden definides per una equació de 2n grau s'anomenen **quàdriques**. Bona part de les superfícies constructives a què es fa referència a l'assignatura pertanyen al grup de les quàdriques. En concret, són quàdriques: l'esfera, el cilindre, el con, els paraboloide i hiperboloide el·líptics i els paraboloide i hiperboloide hiperbòlics.

En general, la intersecció entre dues superfícies quàdriques dóna lloc a una corba de 4t grau; però, en determinades condicions, les corbes resultants seran planes o, ocasionalment, degeneraran en una recta o en un punt.

Conèixer aquestes condicions particulars és important, ja que la resolució, amb corbes planes, de les unions entre les diferents superfícies que componen una forma simplifica molt la seva definició i construcció.

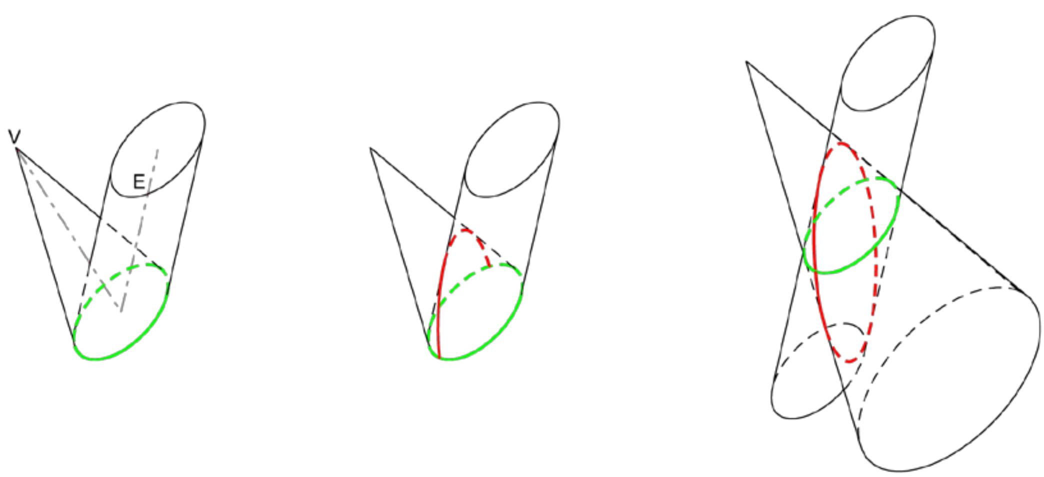
Seccions planes còniques

Una primera propietat important de les quàdriques és que les seves seccions planes són sempre **còniques**, és a dir: el·lipses –amb la circumferència com a cas particular-, paràboles o hipèrboles. Per tant, en tots els casos en què la intersecció entre quàdriques vingui formada per corbes planes, aquestes seran còniques.

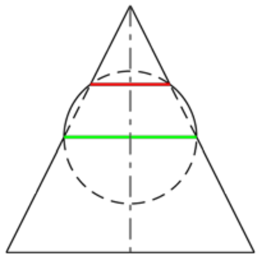
Quàdriques que comparteixen una cònica

Sempre que dues quàdriques comparteixin una mateixa secció plana, podem assegurar que la seva intersecció es completa amb una segona secció plana.

Per exemple a la figura de sota veiem, a l'esquerra, un con i un cilindre definits a partir d'una mateixa el·lipse, com a directriu, i del vèrtex V i la direcció de l'eix E, respectivament. A la dreta i en vermell, veiem la corba plana resultant de la determinació de la intersecció de les dues superfícies. Com sabem, les seccions planes d'un cilindre només poden ser el·lipses, cosa que constatem, a la dreta, allargant les dues figures fins que apareix completa l'el·lipse vermella. La intersecció ve composta, doncs, per les dues el·lipses (la vermella i la verda).



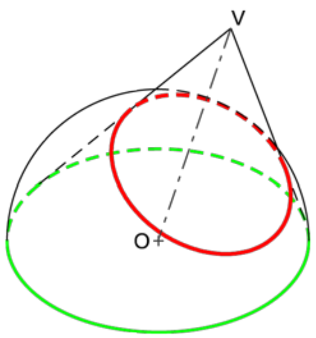
Una cas d’aplicació particularment interessant de la propietat anterior és aquell en què una de les quàdriques és una esfera. Com sabem les seccions planes d’una esfera són sempre circumferències. Doncs bé, quan una d’elles sigui alhora secció d’una altra quàdrica, per exemple d’un con, aquesta propietat permet assegurar que el con i l’esfera tindran una segona circumferència en comú.

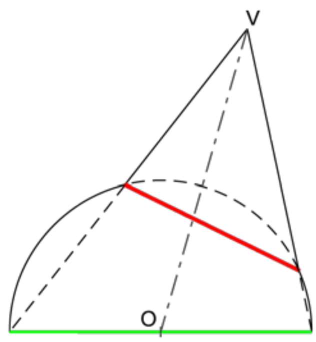


Això resulta intuïtivament obvi si el con és de revolució, cas en que la segona circumferència serà paral·lela a la primera. Així, a la figura adjunta, la secció verda (circular per ser paral·lela a la base) és alhora secció de l’esfera. La disposició simètrica d’ambdues figures ja dóna a entendre, de manera intuïtiva, que el con tornarà a travessar la superfície de l’esfera a la secció vermella, paral·lela a l’anterior.

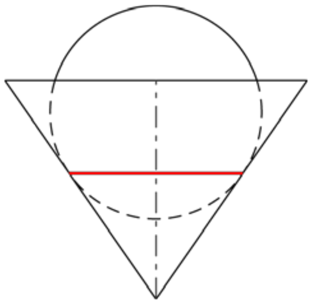
Si, per contra, es tracta d’un con escalè, és a dir d’un con que no és de revolució, el pla de la segona circumferència tindrà una orientació diferent del de la primera; una orientació que determina una segona família de plans paral·lels que també tallen el con segons circumferències (**seccions cícliques**). De fet, per a tot con escalè, com per a qualsevol cilindre de secció recta el·líptica, hi ha sempre dues orientacions de plans que generen seccions cícliques. Determinar aquestes orientacions és de gran importància en la resolució formal amb superfícies quàdriques.

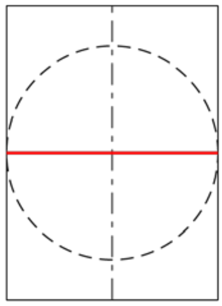
A la figura inferior, el con de vèrtex V té per directriu la circumferència de centre O (de color verd), per la qual fem passar una semiesfera. La corba vermella, per la qual el con travessa la semiesfera, és plana i, pertanyent a una esfera, és forçosament una circumferència. Aquesta relació entre les dues figures apareix de forma més sintètica i rotunda a la figura de la dreta (projecció sobre el pla de simetria), on les dues circumferències (la verda i la vermella) es projecten com a rectes i mostren clarament les dues orientacions de plans que donen lloc a seccions cícliques sobre el con.





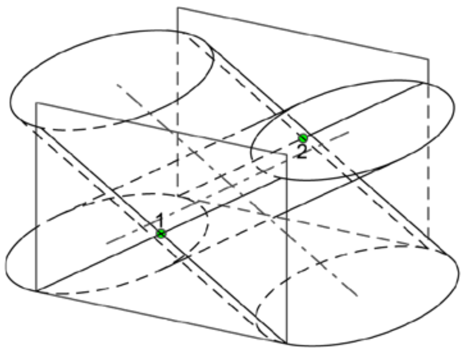
Quàdriques tangents
La corba de contacte entre dues quàdriques tangents és sempre plana. Això es veu clarament en el cas que una de les quàdriques sigui una esfera. Per exemple, a la figura veiem les relacions de tangència entre esfera i con i entre esfera i cilindre de revolució. És clar que en ambdós casos la corba de contacte és una circumferència, que, com a secció de l'esfera, serà menor, en el cas del con, i màxima en el del cilindre.

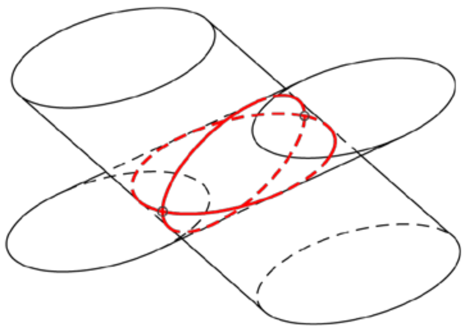




Quàdriques bitangents
Tenen especial interès les posicions de bitangència, és a dir aquelles en què dues quàdriques que es tallen tenen pla tangent comú en dos dels seus punts. En tal cas, la intersecció ve formada per dues còniques que lògicament es tallen en els dos punts de tangència.

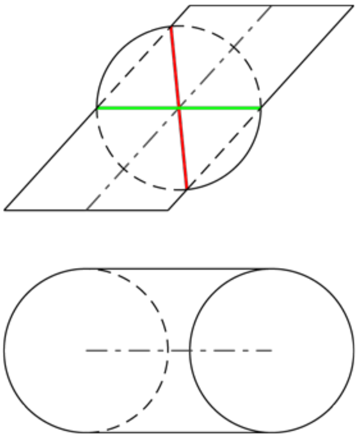
A la figura següent es representa un cas general de dos cilindres amb tangència en dos punts (**1** i **2**). A la dreta, ja amb la intersecció resolta, es veu que aquesta ve formada per dues el·lipses que passen pels dos punts de tangència.

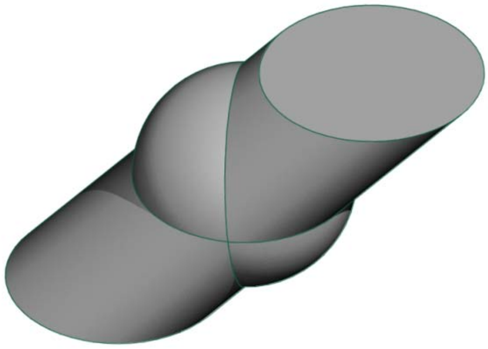




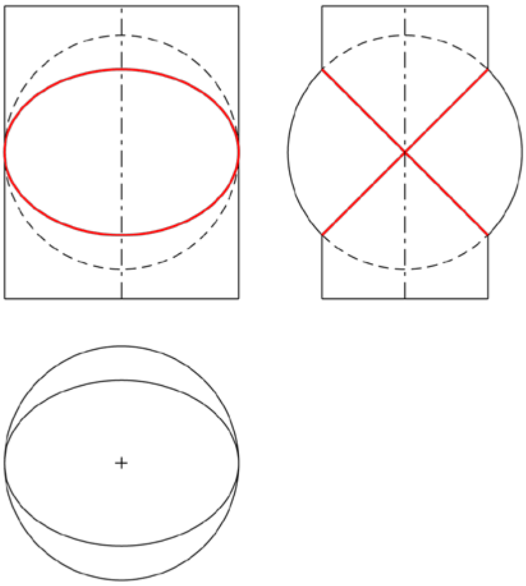
Seccions cícliques de cilindre i con
Ja s'ha parlat de la importància que té, en la resolució formal, controlar l'orientació dels plans que determinen seccions cícliques sobre cilindres i cons que no siguin de revolució. Les propietats anteriors permeten resoldre fàcilment aquesta determinació en els casos següents: a) si ja es coneix l'orientació d'una de les famílies de plans que provoquen seccions circulars, amb la qual cosa el problema es redueix a trobar l'altra orientació i b) si no se'n coneix cap, però sí els plans de simetria del cilindre o del con del qual volem determinar les seccions cícliques.

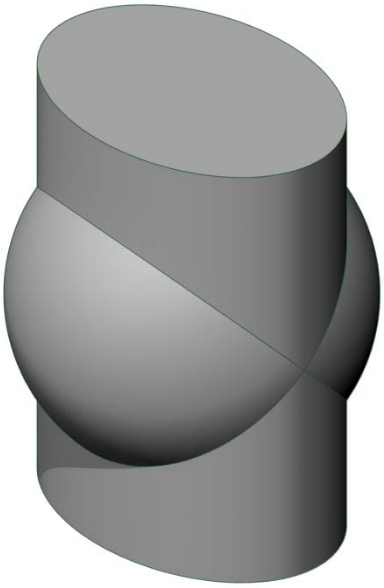
En el primer cas, recorrerem a una esfera que contingui una de les seccions cícliques que ja es coneixen. Llavors, la propietat que relaciona quàdriques que tenen una corba plana en comú assegura que la segona intersecció de l'esfera amb el cilindre o el con en qüestió serà plana i, pertanyent a una esfera, haurà de ser circular. Així, a l'exemple de la figura, el cilindre donat és oblic respecte de la directriu circular amb què s'ha definit. Una esfera auxiliar del mateix radi, amb centre sobre l'eix del cilindre, determina una nova secció (vermella) que també és cíclica, com ho seran totes les generades per plans paral·lels a ella. Si a la imatge de la dreta s'ofereix una vista tridimensional del tema, la representació dièdrica de l'esquerra ens permet obtenir-ne una visió sintètica, per projecció del conjunt sobre el pla de simetria.





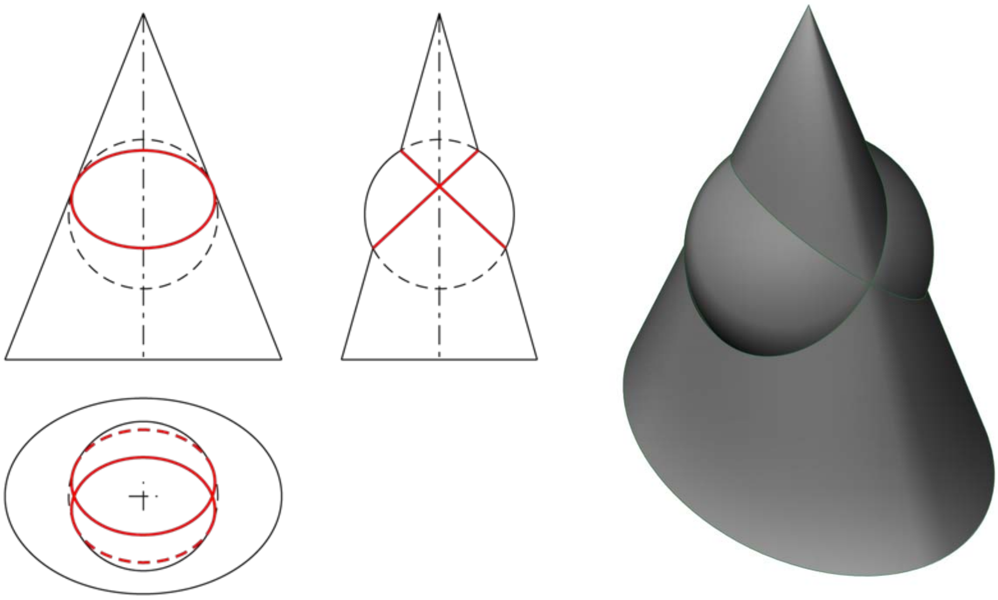
En el cas segon, és a dir, quan no es disposa de cap secció cíclica però es coneixen els plans de simetria, la determinació passa pel recurs a una esfera que sigui bitangent amb el cilindre o el con, per trobar llavors la intersecció de les dues quàdriques. La propietat de la bitangència garanteix que les interseccions seran planes, mentre que el fet que una de les quàdriques sigui una esfera assegura que les corbes seran circumferències i donaran, doncs, les dues orientacions de plans que generen seccions cícliques.





A la figura, l'esfera, de centre sobre l'eix del cilindre i diàmetre igual al diàmetre major de la directriu el·líptica, és bitangent i genera dues seccions cícliques sobre el cilindre, determinant així l'orientació de les dues famílies que el tallen segons circumferències.

En el cas d'un con amb directriu el·líptica, la bitangència caldrà buscar-la també sobre les generatrius corresponents a l'eix major, i lògicament el centre estarà també sobre l'eix de simetria. Però el radi vindrà donat per la perpendicular del centre a qualsevol de les dues generatrius sobre les que s'ha de produir la tangència.

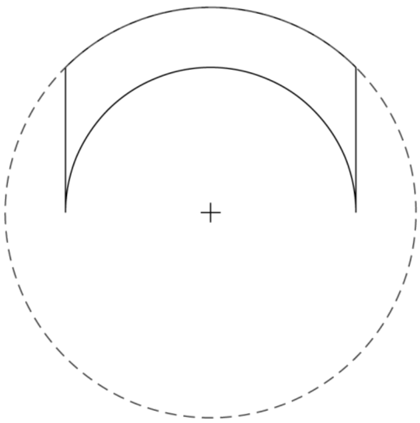


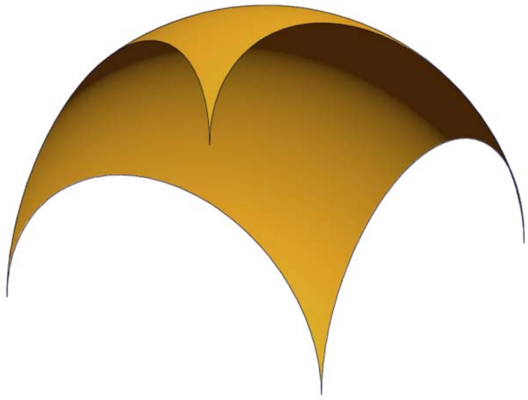
Consells pràctics
Bo i treballant en 3D, bona part dels processos aquí explicats se simplifiquen notablement si es trasllada el problema al pla, és a dir, si s'opera sobre la projecció en el pla de simetria. Com es veu en les diferents figures d'aquest bloc d'apunts, en el pla de simetria la complexitat és redueix a la mínima expressió; les esferes esdevenen circumferències, les circumferències apareixen com a rectes i les tangències entre superfícies es redueixen a tangències entre rectes i circumferències. Si es tenen clars els conceptes, doncs, molts dels problemes aquí exposats acaben tenint solucions elementals treballant sobre el pla adequat.

D'altra banda, cal tenir present que, en l'operativitat del treball amb un modelador 3D, les seccions cícliques o altres tipus de corbes còniques entre superfícies seran obtingudes per intersecció entre sòlids o superfícies. Però els corresponents algorismes d'intersecció determinen punts comuns i finalment representen la corba d'intersecció com una corba NURBS. Això vol dir que, encara que la intersecció obtinguda seguirà, amb força precisió, el traçat de la cònica buscada, internament no quedarà definida com a tal. Així, per exemple, encara que la corba que busquem hagi de ser una circumferència, el seu traçat serà fidel a la forma de circumferència però, en no ser internament reconeguda com a tal, no hi podrem fer un snap de centre ni altres snaps que són habituals sobre una circumferència. Per tant, seguint amb l'exemple, és aconsellable que, un cop el modelador ens ha determinat la corba com a NURBS, la tornem a dibuixar com a circumferència per 3 punts, prenent-los directament de la corba inicialment obtinguda.

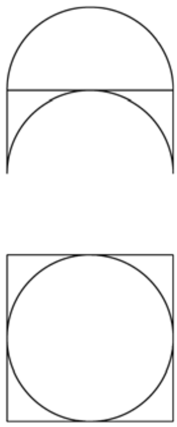
Formes constructives
L'esfera el con i el cilindre són superfícies de presència reiterada en el vocabulari de la història de l'arquitectura, particularment en forma de voltes i cúpules. Completem aquest bloc d'apunts veient un petit repertori de formes compostes basades en la geometria d'aquestes superfícies quàdriques.

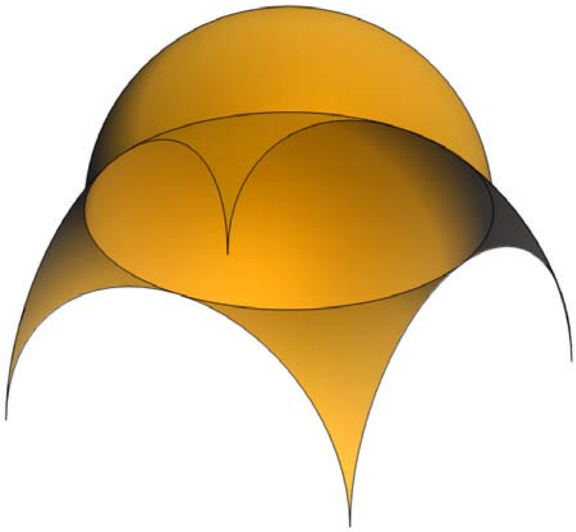
A la següent figura, es mostra la forma que es coneix com a ***volta bufada***, *volta de 4 punts* o *volta de mocador*. Permet cobrir una planta quadrada amb una superfície esfèrica, de manera que els esforços es concentrin en els quatre vèrtexs de la planta. Geomètricament és el resultat de tallar una semiesfera per quatre plans verticals.



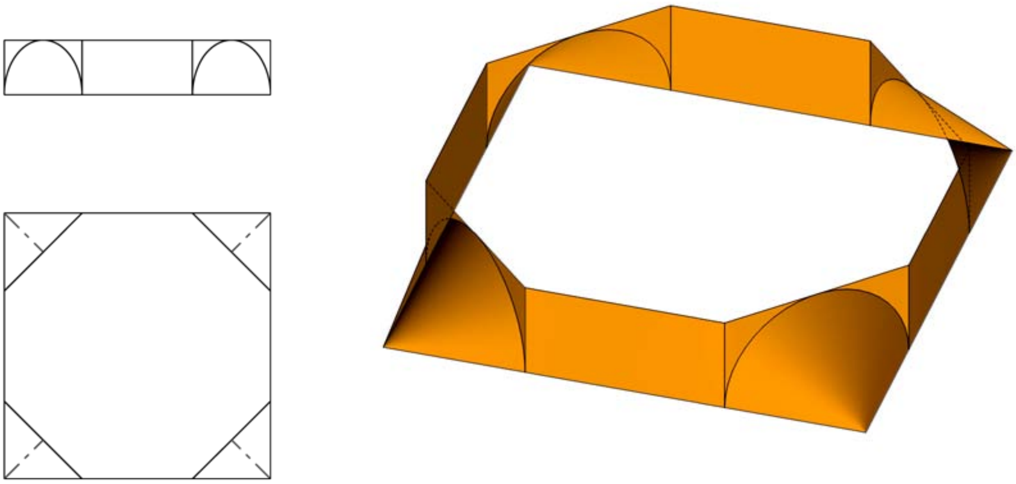


La forma coneguda com a ***cúpula bizantina***, que es mostra a la figura següent, permet cobrir una planta, també quadrada, amb una cúpula esfèrica de diàmetre igual al costat del quadrat de planta. La transició entre el quadrat esmentat i la circumferència es resol amb petxines o trompes esfèriques. En realitat es pot entendre com una forma composta entre la semiesfera i la volta bufada, que s'ha exposat abans, tallada pel pla horitzontal que passa per les claus dels 4 arcs perimetrals.

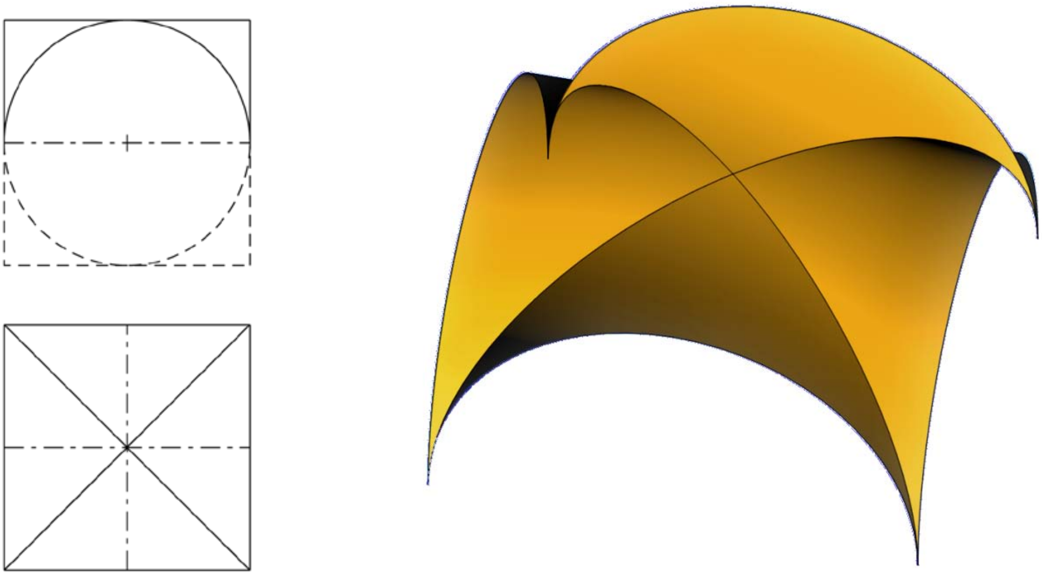




Un problema clàssic per als constructors romànics, el pas de planta quadrada a planta octogonal, basa la seva solució en el con de revolució. La transició, tal com es mostra a la figura següent, es resol amb 4 semicons de revolució, de vèrtex en els vèrtexs del quadrat i eixos horitzontals situats sobre les diagonals.

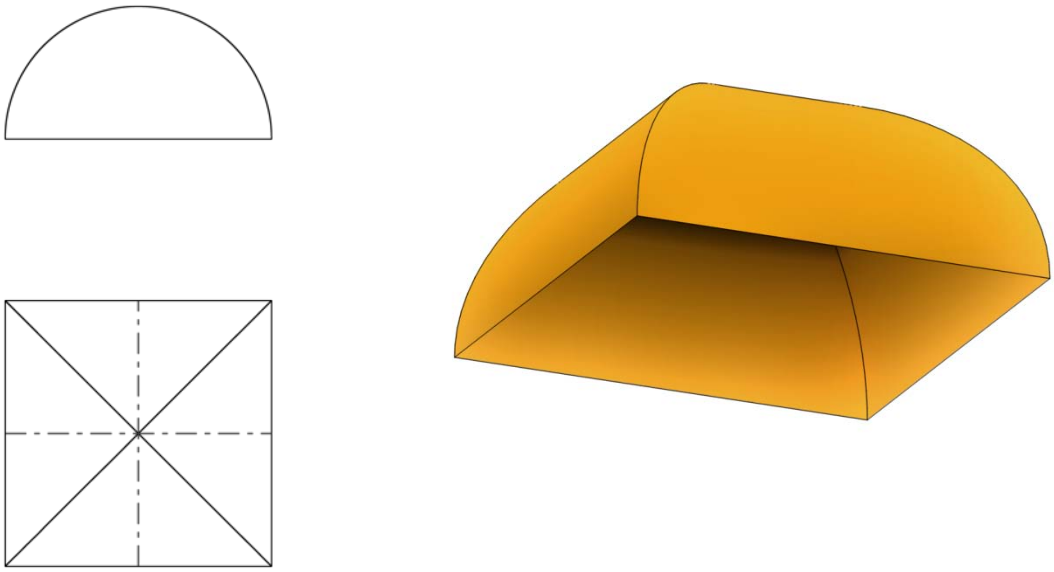


La disposició bitangent de 2 cilindres de revolució d'igual radi i direccions perpendiculars entre sí, és el fonament geomètric de l'anomenada ***volta per aresta***, que es mostra a la figura següent. La bitangència comporta que la intersecció vingui donada per dues el·lipses que, atesa l'ortogonalitat dels cilindres, corresponen a seccions per plans a 45º. Com a forma constructiva, la volta per aresta resol l'encreuament de dues voltes de canó ortogonals i cobreix també una planta quadrada, conduint els esforços als seus quatre vèrtexs. Encadenant voltes per aresta, amb arcs torals entre una i altra, la successió permet cobrir naus rectangulars.

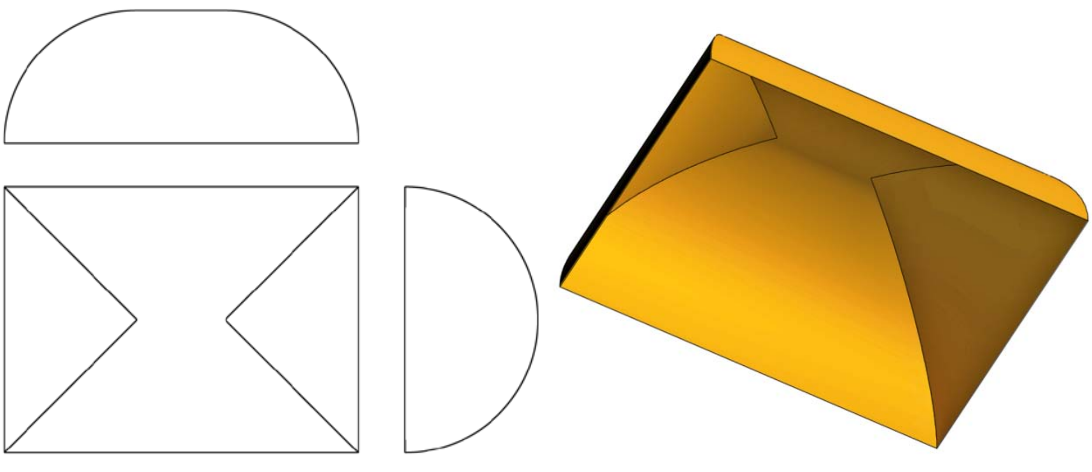


Aquest esquema bàsic de la volta per aresta, encreuant voltes de canó, admet diverses variants, amb cilindres que no siguin de revolució o bé que ho sigui un i l'altre no, sempre que es compleixi la condició de bitangència entre ells, per tal de tenir interseccions planes. Altres variants resulten de la inclinació dels cilindres, de manera que la clau de la volta quedi més alta o més baixa que la dels arcs perimetrals, o de la substitució dels cilindres per cons de revolució.

La forma coneguda com a ***volta de racó de claustre*** ve a ser la inversa de l'anterior. També resulta de la intersecció de dues voltes cilíndriques bitangents, i també cobreix una planta quadrada. Però, a diferència de la volta per aresta, que permet donar continuïtat a la nau –bé amb voltes de canó, bé amb noves voltes per aresta-, la de racó de claustre és una volta que es tanca en ella mateixa i els seus límits no són arcs sinó rectes, de manera que els esforços es transmeten als quatre murs perimetrals.



Si, amb el mateix concepte que la forma anterior, s'allarga un dels dos cilindres a l'hora que el segon es parteix en dues meitats, s'obté l'anomenada ***volta claustral*** o *volta esquifada*. Permet cobrir plantes rectangulars i, com que també queda limitada per rectes, de nou els esforços són transmesos longitudinalment als quatre murs perimetrals.



Com la volta per aresta, el mateix esquema bàsic que s'ha exposat per al cas en què les voltes són de canó admet diverses variants amb: voltes rebaixades, voltes de secció el·líptica, plantes amb nombre de costats diferent de quatre, etcètera. En tots ell, però, l'element fonamental és que els cilindres siguin bitangents.

Quan els cilindres tenen radis diferents o els seus eixos no són coplanaris, les interseccions ja no són planes i el control constructiu de la forma és més complex. Un exemple de forma composta amb intersecció no plana és la que es coneix com a ***lluneta***, que és el resultat de practicar una obertura en forma d'arc sobre una volta cilíndrica, tal com mostra la figura següent.