CONCEPTES BÀSICS SOBRE SUPERFÍCIES GEOMÈTRIQUES

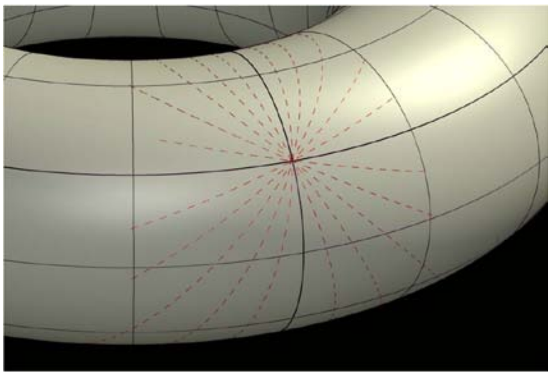
Entenem per **superfície** el lloc geomètric de les successives posicions d'una línia que es mou a l'espai, seguint una llei determinada i contínua. Aquesta línia mòbil, que pot ser recta o corba, rep el nom de **generatriu**, mentre que anomenem **directriu**, tot aquell element, ja sigui un punt, una línia o una superfície, sobre el qual es recolza la generatriu en el seu moviment.

Pla tangent

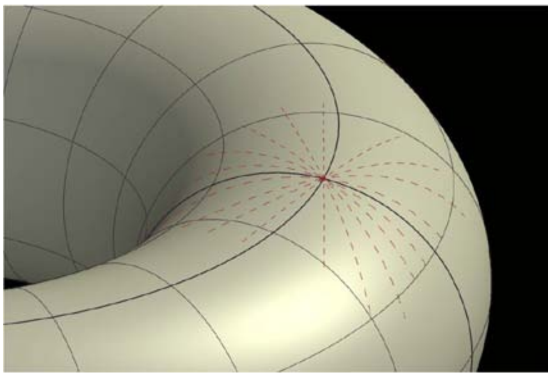
Entenem per pla tangent a una superfície, en un dels seus punts, el pla que conté les rectes tangents, en el punt, a totes les corbes de la superfície que passen pel punt.

Tipus de punts ordinaris en una superfície

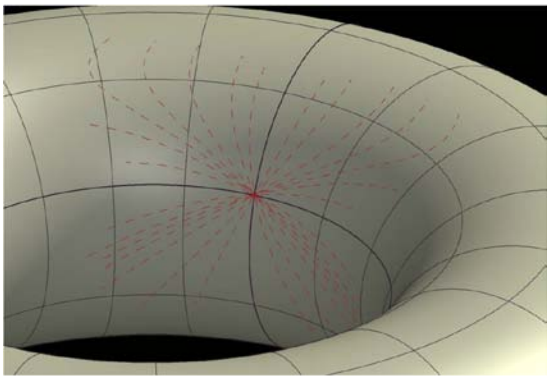
En una superfície, els punts comuns poden ser de tres tipus: el·líptics, parabòlics i hiperbòlics.



Un **punt el·líptic** és aquell en què totes les corbes de la superfície que passen per ell tenen curvatura del mateix signe. La conseqüència és que el pla tangent en el punt no toca la superfície en cap altre punt. Les superfícies que només tenen punts el·líptics s'anomenen el·líptiques, i en son exemples: l'esfera, l'el·lipsoide, el paraboloide el·líptic i l'hiperboloide el·líptic.



Un **punt parabòlic** és aquell en què també totes les corbes de la superfície que hi passen tenen la curvatura del mateix signe, llevat d'una en què la curvatura és nul·la. La conseqüència és que el pla tangent en el punt conté tots els punts de l'esmentada línia de curvatura nul·la. Les superfícies que tenen tots els seus punts parabòlics són desenvolupables, i en són exemples, els poliedres, els prismes, les piràmides, els cilindres i els cons.



El tor és un exemple de superfície amb els tres tipus de punts.

Anomenem **punts hiperbòlics** aquells en què les curvatures de les seccions de la superfície, passant pel punt, van des d'un màxim positiu a un mínim negatiu. La conseqüència és que el pla tangent en el punt talla la superfície. Aquelles superfícies en què tots els punts són hiperbòlics, s'anomenen hiperbòliques. En són exemples el paraboloide i l'hiperboloide hiperbòlic.

Geodèsica
S'anomena geodèsica entre 2 punts d'una superfície la línia de longitud mínima que, continguda a la superfície, uneix els 2 punts.

Tipus de superfícies geomètriques
Podem classificar les superfícies geomètriques en dos grans grups: reglades i corbes.

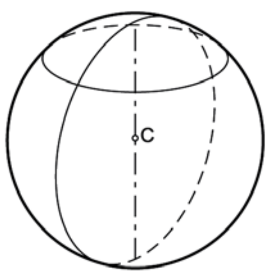
Són **superfícies reglades** les que es poden generar pel moviment d'una recta generatriu. La conseqüència és que, per cada punt d'una superfície reglada, hi passa, com a mínim, una recta que és de la superfície. Les superfícies reglades poden ser **desenvolupables**, si es poden estendre sobre un pla, o **guerxes** si no es poden desenvolupar.

Són **superfícies corbes** les que només es poden generar pel moviment d'una corba generatriu. Com a conseqüència, per cap dels seus punts es pot fer passar una recta que hi pertanyi.

Dins d'aquests grans grups, s'inscriu un ampli ventall de superfícies, i òbviament no ens podem plantejar estudiar-les totes. Però sí que és convenient ampliar mínimament el coneixement sobre les superfícies més bàsiques, particularment aquelles que, per les seves característiques, formen part del vocabulari històric de les formes constructives. Són formes que cal conèixer amb certa profunditat perquè, més enllà de la història i de les facilitats que avui ens puguin donar els sistemes informàtics per operar amb superfícies de forma lliure, sovint les superfícies tradicionals segueixen sent les que donen millor resposta als problemes arquitectònics i constructius. A l'assignatura de Dibuix 2 vàrem treballar exclusivament amb superfícies polièdriques o de cares planes: prismes, piràmides i poliedres regulars; superfícies que, dins de la classificació que acabem de fer, són totes reglades desenvolupables. Ara començarem a ampliar el ventall de formes centrant-nos en el coneixement de l'esfera, el cilindre i el con.

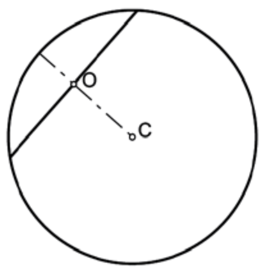
L'esfera

És una superfície corba de revolució. Es genera per rotació d'una circumferència entorn de qualsevol dels seus diàmetres. Com a conseqüència, totes les seccions per plans normals a la superfície (perpendiculars al pla tangent en un punt), són circumferències idèntiques, que comparteixen radi i centre amb l'esfera, i s'anomenen **circumferències màximes**.



Cicumferències màxima i menor.

Qualsevol altra secció per plans que no passin pel centre serà també una circumferència, però de diàmetre menor que la màxima, i se l'anomena **circumferència menor**.

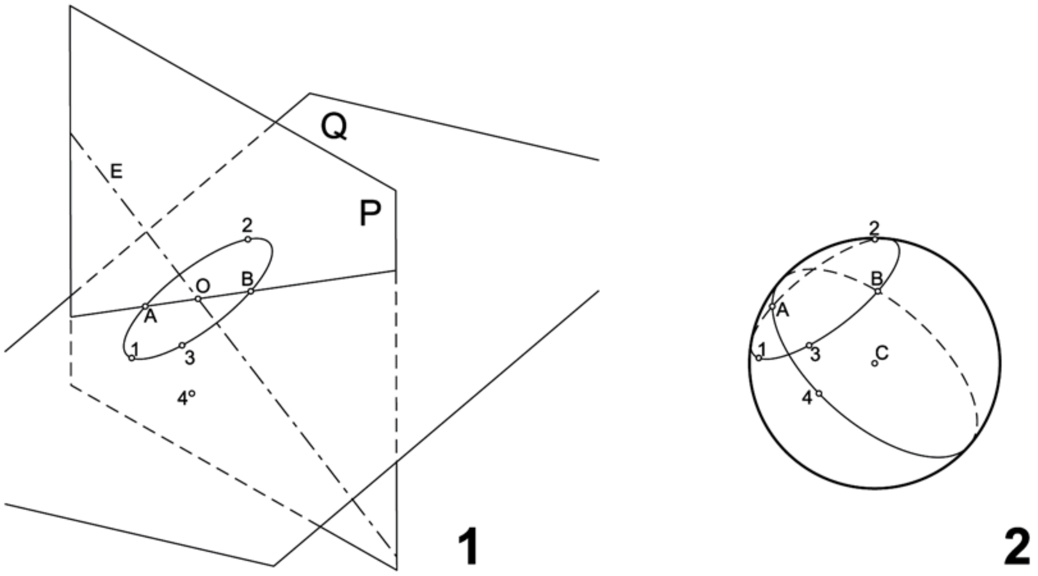


La perpendicular al pla sector, passant per, passa també per C.

Per a qualsevol secció, la perpendicular al pla sector, en el centre de la secció, passa pel centre de l'esfera.

Una esfera queda determinada si se'n coneix el centre i un punt, ja que tos els seus punts disten del centre la mida d'un radi.

Si no se’n té el centre, l’esfera queda també determinada si se’n coneixen 4 punts no coplanaris. A la figura següent es mostra el procediment per determinar el centre de l’esfera que passa pels punts 1, 2, 3 i 4. El centre estarà situar sobre la recta E, normal, pel centre, al pla Q de la circumferència que determinen els punts 1, 2 i 3. En conseqüència, el pla P, que determinen la recta E i el punt 4, passa pel centre de l’esfera i, per tant, ha de contenir una circumferència màxima, que queda determinada pel mateix punt 4 i els punts A i B, d’intersecció de P amb la primera circumferència. El punt C, centre d’aquesta circumferència, és doncs el centre de l’esfera buscada.

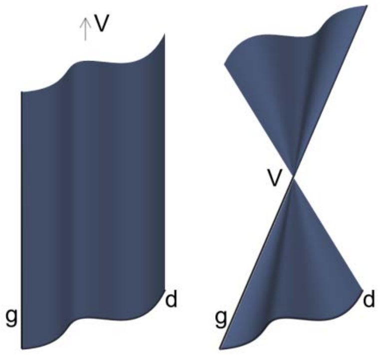


Diguem, per acabar aquest apartat dedicat a l’esfera, que la geodèsica entre dos del seus punts és l’arc de circumferència màxima que passa pels punts.

El cilindre i el con

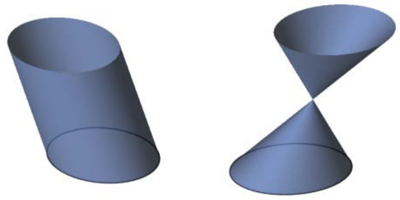
Cilindre i con són superfícies reglades i, com el prisma i la piràmide, són també **superfícies radials**, és a dir, són superfícies que es generen pel moviment d’una recta que, mantenint un punt fix, que anomenem **vèrtex**, es recolza sobre una línia directriu.

Si el vèrtex és un punt impropi, és a dir un punt de l’infinit, les generatrius són paral·leles i la superfície serà: un prisma, si la directriu és poligonal, i un cilindre, si la directriu és una corba. En canvi, si el vèrtex és un punt propi, les generatrius convergiran en ell i la superfície serà una piràmide o un con, segons que la directriu sigui poligonal o corba.

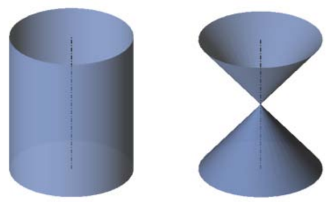


Generalització dels conceptes de cilindre i con.

De la definició, es desprèn que la directriu d’una radial pot ser qualsevol mena de corba, per tant el ventall de superfícies que responen als conceptes de cilindre i con és amplíssim. Això no obstant, els que són objecte d’estudi particular i que, per les seves propietats, són habituals en el repertori de formes constructives històriques són els que tenen directriu el·líptica, en el ben entès que el concepte el·lipse inclou la circumferència com a cas particular. Dins d'aquest últim cas, mereixen especial atenció els que són de revolució, és a dir, aquells que poden generar-se per la rotació d'una recta entorn d'un eix coplanari amb ella.



Cilindre i con de directrius el·líptiques.



Cilindre i con de revolució.

En general, en l'estudi de formes bàsiques i també en endavant en aquests apunts, s'utilitzen els termes cilindre i con per referir-se a cilindres i cons de directriu el·líptica.

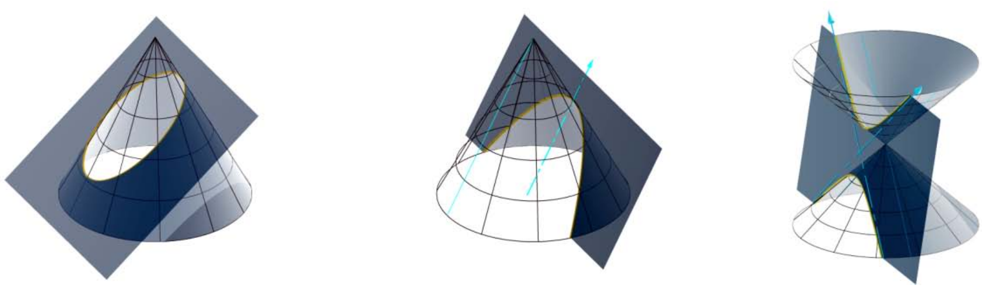
Seccions planes de cilindre i con

La secció d'un cilindre per un pla no paral·lel a les generatrius és sempre una el·lipse. En el cas particular que el pla sector sigui paral·lel a les generatrius, la secció estarà formada per 2 rectes paral·leles (2 generatrius) o només 1, si el pla és tangent al cilindre.

En el con, en cavi, podem trobar 3 tipus de seccions planes diferents, llevat dels cas particular en què el pla sector passa pel vèrtex, cas en el qual la secció es reduirà també a 2 generatrius, o a 1 si el pla és tangent. Llevat d'aquests casos límit, les seccions del con seran:

- **El·lipse**, si el pla talla totes les generatrius,
- **Paràbola**, si el pla és paral·lel a una generatriu, i
- **Hipèrbola**, si és paral·lel a 2 generatrius.

Aquestes tres corbes, seccions d'un con, són conegudes també com a **corbes còniques**.

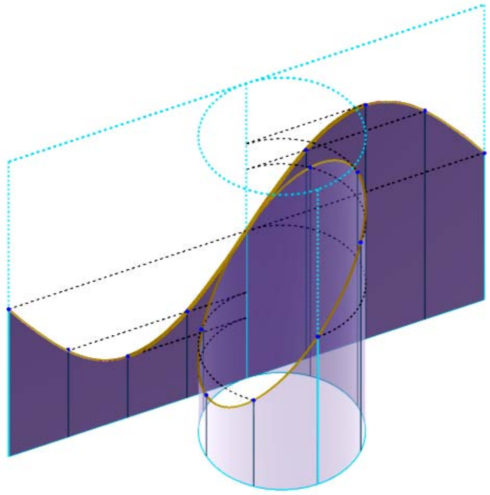


Les tres seccions corbes del con: el·lipse, paràbola i hipèrbola.

En el cilindre, les seccions produïdes per una família de plans paral·lels són corbes idèntiques. En el con, en canvi, plans paral·lels generen seccions homotètiques.

Desenvolupament de cilindre i con

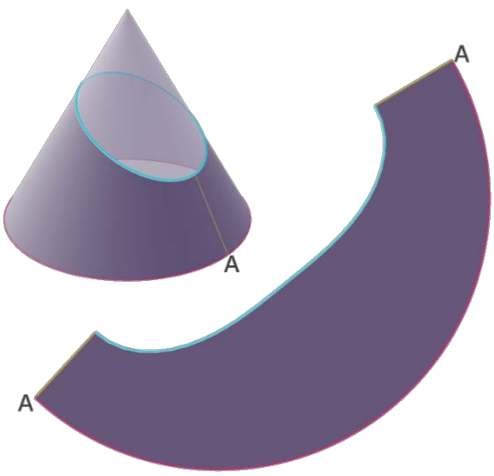
Com les altres radials, el cilindre i el con són superfícies desenvolupables.



L'el·lipse de la secció es transforma en sinusoide.

En el cas del cilindre, el desenvolupament requereix la prèvia determinació de la seva secció recta, és a dir, secció feta per un pla perpendicular a les generatrius. Coneguda la secció recta, sigui circular o el·líptica, la seva transformada, en el desenvolupament, serà un segment de recta de longitud la de la corba de secció. El desenvolupament, llavors, pot controlar-se dividint en n parts, tant la secció com la transformada, i transportant-hi les generatrius corresponents.

La transformada de qualsevol secció produïda per un pla no perpendicular, ni paral·lel, a les generatrius és una sinusoide.



Desenvolupament d'una porció de con de revolució.

El desenvolupament del con de revolució és relativament senzill atès que la directriu circular es transforma en un arc de circumferència, de radi la longitud de la generatriu (g) i amb un angle de 360·r/g, on r és el radi de la directriu.

Quan el con no és de revolució, el desenvolupament es resol, de manera aproximada, per mitjà d'una piràmide inscrita.

Quedi clar que l'aproximació que aquí fem al tema del desenvolupament d'aquestes superfícies radials és merament teòrica i conceptual. Més endavant, quan estudiem els models de malles, veurem la manera pràctica de resoldre aquests desenvolupaments, amb un alt grau de precisió, per aproximació polièdrica.

Determinació de con i cilindre

Com qualsevol radial, cilindre i con queden determinats per una directriu i el vèrtex. En el cas del cilindre, en què és impropi, el vèrtex queda definit per la direcció de les generatius.

A l'hora de generar-los com a primitives, distingirem entre els casos de directriu circular i els de directriu el·líptica. Si la directriu és circular, el més immediat és introduir la superfície a partir de la corresponent primitiva de biblioteca. Si la directriu no és circular, la generació serà per extrusió del seu perfil, amb factor d'escala 1, si és un cilindre, i 0 si es tracta d'un con

Geodèsiques

La geodèsica entre 2 punts d'una radial és la línia que els uneix i que té per transformada una recta. Per tant, la determinació de la geodèsica passa sempre per portar els 2 punts al desenvolupament, unir-los per mitjà d'un segment rectilini i restituir el segment a la superfície.